פתרונות מלאים

104016 – אלגברה 1/מ

סמסטר אביב תשס"ג, מועד א', 10.07.03

<u>תשובות נכונות</u>

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה מס. 1	×				
שאלה מס. 2				×	
שאלה מס. 3					×
שאלה מס. 4		×			
שאלה מס. 5		×			
שאלה מס. 6				×	
שאלה מס. 7			×		
שאלה מס. 8					×
שאלה מס. 9		×			
שאלה מס. 10	×				
שאלה מס. 11				×	
שאלה מס. 12			×		
שאלה מס. 13					×
שאלה מס. 14				×	
שאלה מס. 15				×	

פתרונות

<u>פתרון שאלה מספר 1</u> :

נתון $A \in R^{3\times 3}$ המקיימת $A^3 = -5B$, כאשר $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 27 \\ -3 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$, ויש לחשב את :

$d = \det A$. נחשב תחילה את $\det B$:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 27 \\ -3 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 27 \\ -3 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 64 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 64 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 64(-8+9) = 64$$

$$|B| = 64$$

לפי חוקי דטרמיננטים נקבל :

$$A^3 = -5B$$
$$|A^3| = |-5B|$$
$$|A|^3 = (-5)^3 |B|$$
$$|A|^3 = (-5)^3 64 = (-5)^3 4^3 = (-5\cdot 4)^3 = (-20)^3$$

מכאן כי $|A| = \sqrt[3]{(-20)^3}$. השורשים מסדר 3 של $(-20)^3$ הם (-20) ועוד שני שורשים מרוכבים (z והצמוד שלו). אבל נתון כי $A \in R^{3\times 3}$ כלומר A ממשית ולכן detA הוא מספר ממשי, ומכאן כי : $d = |A| = -20$.

סימון נכון : א'.

<u>פתרון שאלה מספר 2</u> :

נתון $A,B\in F^{100\times 100}$ ומקיימות : $AB=0$.

שימו לב שמתוך הנתון AB = 0 לא נובע BA = 0, למשל :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$
$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אם תשלימו את כל המקומות החסרים למטריצות n×n ב- 0, תקבלו גם דוגמא מסדר n לכל n > 1 טבעי. נבדוק את כל 5 הסעיפים :

א.

$$(A+B)^2+(A+B)(A-B)=(A+B)(A+B)+(A+B)(A-B)=$$
$$(A+B)(A+B+A-B)=(A+B)(2A)=2A^2+BA\neq 2A^2$$

ב.

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2+BA-B^2$$
$$(A-B)(A+B)=A^2-BA+AB-B^2=A^2-BA-B^2$$
$$(A+B)(A-B)\neq(A-B)(A+B)$$

ג.

$$(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=B\cdot 0\cdot A=0$$
$$B^2A^2=BBAA\neq 0$$
$$(BA)^2\neq B^2A^2$$

ד.

$$(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=B\cdot 0\cdot A=0$$
$$A^2B^2=AABB=A(AB)B=A\cdot 0\cdot B=0$$
$$(BA)^2=A^2B^2$$

ה. לא נכון, ראה דוגמא בתחילת פתרון השאלה.

סימון נכון: ד'.

<u>פתרון שאלה מספר 3</u> :

נתון כי z_1 , z_2 הם שני הפתרונות של המשוואה : $z^2-6iz-9-2i=0$.

נפתור את המשוואה ונמצא את התשובה הנכונה :

$$z^2-6iz-9-2i=0$$

$$z_{1,2}=\frac{6i\pm\sqrt{(-6i)^2-4\cdot1\cdot(-9-2i)}}{2}=\frac{6i\pm\sqrt{-36+36+8i}}{2}=\frac{6i\pm\sqrt{8i}}{2}$$

$$\sqrt{8i}=\sqrt{8}cis\left(\frac{90+360k}{2}\right)=2\sqrt{2}cis(45+180k)\ ,\ k=0,1$$

$$k=0\ \Rightarrow\ 2\sqrt{2}cis45=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2+2i$$

$$k=1\ \Rightarrow\ 2\sqrt{2}cis225=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2-2i$$

$$z_{1,2}=\frac{6i\pm\sqrt{8i}}{2}=\frac{6i\pm\left(\pm(2+2i)\right)}{2}$$

$$z_1=\frac{6i+2+2i}{2}=\frac{2+8i}{2}=1+4i$$

$$z_2=\frac{6i-2-2i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

סימון נכון: ה'.

<u>פתרון שאלה מספר 4</u> :

נתון : $A_{m\times n}B_{n\times n}=0_{m\times n}$ כאשר $k<\min\{m,n\}$, $rank(B)=k$.

נזכור כי לכל מטריצה $A_{m\times n}$ מתקיים כי מימד מרחב השורות של A שווה למימד מרחב העמודות של A שווה לדרגה של A.

נסמן ב- B^j את העמודה ה-j-ית של המטריצה B (j = 1,..,n). לפי הגדרת כפל מטריצות נקבל :

$$A_{m\times n}B_{n\times n}=0_{m\times n}$$

$$A\left(B^1\ B^2\ B^3\ \cdots\ B^n\right)=\left(0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\right)$$

$$AB^j=0\ ,\ \forall j=1,...,n$$

כלומר כל עמודה של המטריצה B שייכת למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax = 0. לפי משפט, מימד מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית Ax = 0 שווה ל-

n – rank(A). מאחר ו- rank(B) = k, וכל עמודה של B היא פתרון למערכת, הרי שלמערכת Ax = 0 יש לפחות k פתרונות בלתי תלויים (שהם עמודות המטריצה B, בה יש k עמודות בת"ל לפי הנתון), כלומר, מימד מרחב הפתרונות של המערכת Ax = 0, ששווה ל- n – rank(A), הוא לפחות k, או: n – rank(A) ≥ k. נעביר אגפים ונקבל: rank(A) ≤ n – k, כלומר מימד מרחב השורה או העמודה של המטריצה A הוא לכל היותר n – k.

סימון נכון: ב'.

<u>פתרון שאלה מספר 5</u>:

נתון:

$$V = R_3[x]$$
$$U = \{p(x) \in V \mid p'(1) - p(1) = 0\} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid 3a + 2b + c - a - b - c - d = 0\}$$
$$= \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid 2a + b - d = 0\}$$
$$W = Sp\{x^3 + x^2 + x + 3\ ,\ x^3 - x + 3\ ,\ -x^3 + x^2 + 3x - 3\}$$

נחשב בסיס ומימד ל- U, W ו- U∩W, ונבחר בתשובה הנכונה.

בסיס ומימד ל- U:

$$U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid 2a + b - d = 0\} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid 2a + b = d\}$$
$$= \{ax^3 + bx^2 + cx + 2a + b\} \quad \Rightarrow$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + 2a + b = a(x^3 + 2) + b(x^2 + 1) + c(x)$$
$$U = Sp\{x^3 + 2\ ,\ x^2 + 1\ ,\ x\} \quad , \quad \dim U = 3$$

בסיס ומימד ל- W:

נבדוק תלות בין וקטורי קוארדינטות לפי בסיס סטנדרטי של V:

$$W = Sp\{x^3 + x^2 + x + 3\ ,\ x^3 - x + 3\ ,\ -x^3 + x^2 + 3x - 3\} \quad \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = Sp\{x^3 - x + 3\ ,\ x^2 + 2x\} \quad , \quad \dim W = 2$$

בסיס ומימד ל- $U \cap W$:

ניקח איבר כללי ב- W ונאלץ עליו את התנאי של U (d = 2a + b כלומר המקדם החופשי שווה לפעמיים המקדם של x^3 ועוד המקדם של x^2) :

$$W = Sp\{x^3 - x + 3\ ,\ x^2 + 2x\}$$
$$\alpha(x^3 - x + 3) + \beta(x^2 + 2x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (-\alpha + 2\beta)x + 3\alpha \qquad \Rightarrow$$
$$3\alpha = 2\alpha + \beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta$$
$$U \cap W = \{\alpha x^3 + \beta x^2 + (-\alpha + 2\beta)x + 3\alpha \mid \alpha = \beta\} = \{\alpha x^3 + \alpha x^2 + (-\alpha + 2\alpha)x + 3\alpha\}$$
$$= \{\alpha x^3 + \alpha x^2 + \alpha x + 3\alpha\} \qquad \Rightarrow$$
$$\alpha x^3 + \alpha x^2 + \alpha x + 3\alpha = \alpha(x^3 + x^2 + x + 3) \qquad \Rightarrow$$
$$U \cap W = Sp\{x^3 + x^2 + x + 3\} \quad , \quad \dim(U \cap W) = 1$$

סימון נכון: ב'.

<u>פתרון שאלה מספר 6</u>:

נסמן את המטריצה הנתונה ב- A. כדי לבדוק מתי המטריצה A היא הפיכה, נחשב דטרמיננטה שלה, ונדרוש שהיא תהייה שונה מ- 0:

$$A=\begin{pmatrix}1 & z & z\\ \bar{z} & 1 & |z|\\ \bar{z} & |z| & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & z & z\\ \bar{z} & 1 & |z|\\ \bar{z} & |z| & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & z & z\\ 0 & 1-z\bar{z} & |z|-z\bar{z}\\ 0 & |z|-z\bar{z} & 1-z\bar{z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & z & z\\ 0 & 1-|z|^2 & |z|-|z|^2\\ 0 & |z|-|z|^2 & 1-|z|^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-|z|^2 & |z|-|z|^2\\ |z|-|z|^2 & 1-|z|^2\end{vmatrix}=$$

$$\left(1-|z|^2\right)^2-\left(|z|-|z|^2\right)^2$$

$$|A|\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(1-|z|^2\right)^2-\left(|z|-|z|^2\right)^2\neq 0$$

$$\left(1-|z|^2\right)^2\neq\left(|z|-|z|^2\right)^2$$

$$1-|z|^2\neq\pm\left(|z|-|z|^2\right)$$

$$a)\,1-|z|^2\neq|z|-|z|^2 \quad\Rightarrow\quad 1\neq|z|$$

$$b)\,1-|z|^2\neq-|z|+|z|^2 \quad\Rightarrow\quad 1+|z|-2|z|^2\neq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2|z|^2-|z|-1\neq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2(|z|-1)(|z|+\tfrac{1}{2})\neq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$|z|\neq 1\,,\,-\tfrac{1}{2} \qquad (|z|\geq 0) \quad\Rightarrow\quad |z|\neq 1$$

$$a)+b) \quad\Rightarrow\quad |A|\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad |z|\neq 1$$

סימון נכון: ד'.

פתרון שאלה מספר 7:

לפי הסעיפים השונים נחשב בסיס ומימד לגרעין, לתמונה ולחיתוך שלהם.

$T(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)=ax^3+(-2a+3b+c)x+(4a+b+d)$

$\operatorname{Im}T$:

$a(x^3-2x+4)+b(3x+1)+c(x)+d(1)$

$\operatorname{Im}T=Sp\{x^3-2x+4\ ,\ 3x+1\ ,\ x\ ,\ 1\}=Sp\{x^3-2x+4\ ,\ x\ ,\ 1\}=Sp\{x^3\ ,\ x\ ,\ 1\}\ ,\quad \dim\operatorname{Im}T=3$

$KerT$:

$\dim\Re_4[x]=\dim\operatorname{Im}T+\dim KerT \quad\Rightarrow\quad 5=3+\dim KerT \quad\Rightarrow\quad \dim KerT=2$

$$\begin{cases}a=0\\-2a+3b+c=0\\4a+b+d=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a=0\\3b+c=0\\b+d=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a=0\\c=-3b\\d=-b\end{cases}$$

$KerT=\{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ \mid\ a=0\ ,\ c=-3b\ ,\ d=-b\}=\{0x^4+bx^3-3bx^2-bx+e\}=$
$\{bx^3-3bx^2-bx+e\}$

$bx^3-3bx^2-bx+e=b(x^3-3x^2-x)+e(1)$

$KerT=Sp\{x^3-3x^2-x\ ,\ 1\}$

מתוך הבסיסים שקיבלנו לתמונה ולגרעין, ברור כי הפולינום p(x) = 1 שייך ל- $\operatorname{Im}T\cap KerT$. מאחר והמרחב $\operatorname{Im}T\cap KerT$ מוכל הן בגרעין והן בתמונה, הרי שמימדו לא יותר מ- 2 (כמימד הגרעין).
מצד שני, ברור כי הפולינום x^3-3x^2-x , השייך לגרעין, אינו שייך לתמונה (כי x^2 לא מתקבל בתמונה). לכן, שלא יתכן כי מימד החיתוך הוא 2 (שכן אז החיתוך היה שווה לגרעין כלומר הפולינום x^3-3x^2-x השייך לגרעין היה שייך גם לתמונה). לכן, $\dim(\operatorname{Im}T\cap KerT)=1$ ובסיס לחיתוך הוא $\{1\}$.

סימון נכון: ג'.

פתרון שאלה מספר 8:

לפי משפט מתקיים: $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$. במקרה שלנו, $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. נכתוב את v כקומבינציה

ליניארית של איברי הבסיס הסדור B הנתון לקבלת $[v]_B$, ונשתמש במשפט.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta b_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות

$$\alpha = 1\ ,\ \beta = 0\ ,\ \gamma = 1\ ,\ \delta = 0$$

$$v = 1b_1 + 0b_2 + 1b_3 + 0b_4 \quad \Rightarrow \quad [v]_B = (1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

$$[T]_B\,[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(v) = 2b_1 + 1b_2 + 2b_3 1b_4 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

סימון נכון: ה'.

פתרון שאלה מספר 9:

נבדוק כל סעיף אם הוא נכון או לא נכון.

א. לא נכון, למשל ניקח:

$$W=\{(a_1,0,\dots,0)\,|\,a_1\in R\} \quad ; \quad U=\{(0,a_2,a_3\dots,a_6)\,|\,a_j\in R\}$$
$$T(a_1,\dots,a_6)=(a_1,0,\dots,0)$$
$$\operatorname{Im}T=W \quad KerT=U$$
$$\dim W=1 \quad , \quad \dim U=5$$

ב. נכון.

נסמן: dimU = k $(k\le 6)$, אז dimW = 6 - k. יהי: $\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס ל- U, ו- $\{u_{k+1},\dots,u_6\}$ בסיס ל- W.

נשלים את הבסיס של U לבסיס של כל המרחב R^6: $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_6\}$, ונגדיר:

$$\begin{aligned}
&T:R^6\to R^6\\
&T(v_1)=0\\
&T(v_2)=0\\
&\quad\vdots\\
&T(v_k)=0\\
&T(v_{k+1})=u_{k+1}\\
&T(v_{k+2})=u_{k+2}\\
&\quad\vdots\\
&T(v_6)=u_6
\end{aligned}$$

לפי משפט, קיימת העתקה ליניארית אחת ויחידה המקיימת את התנאים לעיל, ובנוסף, מתקיים כי: KerT = U, ו- ImT = W, כי: לפי משפט, אם $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_6\}$ בסיס ל- V, אז $\{T(v_1),\dots,T(v_k),T(v_{k+1}),\dots,T(v_6)\}$ פורש את ImT, לכן $\{u_{k+1},\dots,u_6\}$ פורש את ImT. בנוסף, קבוצה זו בלתי תלויה ליניארית (כי היא בסיס ל- W) ולכן היא בסיס ל- ImT. כיוון שלמרחבים W ו- ImT יש אותו בסיס, הרי ש- W = ImT, ו- dimImT = 6 – k.

לפי משפט, $\dim R^6=\dim ImT+\dim KerT$, לכן: dimKerT = 6 – (6 – k) = k

לפי הגדרת T, $\{v_1,\dots,v_k\}$ הם k וקטורים בלתי תלויים ליניארית (כי הם בסיס ל- U) השייכים ל- KerT. אבל dimKerT = k, לכן כל k וקטורים בלתי תלויים בגרעין הם בסיס לכן $\{v_1,\dots,v_k\}$ הוא בסיס ל- KerT. ל- KerT ול- U אותו בסיס, לכן: KerT = U.

ג. לא נכון, למשל ניקח:

$$U=\{(a_1,0,\dots,0)\,|\,a_1\in R\}\quad;\quad W=\{(a_2,0,a_3,a_4,a_5,a_6)\,|\,a_j\in R\}$$
$$T(a_1,\dots,a_6)=(a_2,0,a_3,a_4,a_5,a_6)$$
$$\operatorname{Im}T=W\quad KerT=U$$
$$T(1,0,0,0,0,0)=(0,0,0,0,0,0)\quad\Rightarrow\quad(1,0,0,0,0,0)\in KerT=U$$
$$T(0,1,0,0,0,0)=(1,0,0,0,0,0)\quad\Rightarrow\quad(1,0,0,0,0,0)\in \operatorname{Im}T=W$$
$$U\cap W\neq 0\quad\Rightarrow\quad R^6\neq U\oplus W$$

ד. לא נכון, למשל ניקח:

$$W=U=\{(a_1,a_2,a_3,0,0,0)\,|\,a_j\in R\}$$
$$T(a_1,a_2,\dots,a_6)=(a_4,a_5,a_6,0,0,0)$$
$$\operatorname{Im}T=KerT=U=W$$

ה. לא נכון, למשל הדוגמא בסעיף ד'.

סימון נכון: ב'.

<u>פתרון שאלה מספר 10:</u>

נתונות שתי מטריצות ממשיות, $A_{3\times6}$ ו- $B_{6\times3}$, שתיהן מדרגה 3. השאלה דנה במספר הפתרונות האפשריים למערכת משוואות שמטריצת המקדמים שלה היא AB או BA, לכן חשוב לדעת מה היא הדרגה של שתי מטריצות אלו (כי מספר הפתרונות מושפע מדרגת מטריצת המקדמים). לפי משפט ידוע כי: $\text{rank}(AB)\le\min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}$.

המטריצה AB היא מטריצה מסדר 3×3, ולפי המשפט מתקיים:

$$\text{rank}(AB)\le\min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}=3$$
$$\text{rank}(AB)\le 3$$

באותו אופן, BA היא מטריצה 6×6, ולפי המשפט:

$$\text{rank}(BA)\le\min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}=3$$
$$\text{rank}(BA)\le 3$$

עתה, נעבור על כל הסעיפים:

א. נכון. כאמור BA היא מטריצה 6×6 מדרגה קטנה או שווה 3, ולכן היא בהכרח לא הפיכה, ולכן בדרוג יתאפסו שורות. מכאן כי קיים $c\in R^6$ עבורו למערכת $(BA)x=c$ אין פתרון.

ב. לא נכון. כדי שלמערכת יהיה פתרון יחיד, צריך שיתקיים $\text{rank}(BA)=6$, וכאמור זה לא נכון.

ג. לא נכון. כדי שזה יהיה נכון צריך להתקיים כי $rank(AB) = 3$. כאמור, לפי המשפט מתקיים $rank(AB) \le 3$. נשאלת השאלה, האם מתוך הנתון ש- $rank(A) = rank(B) = 3$, נובע שבהכרח יש שוויון באי שוויון, ואז הטענה נכונה. התשובה היא לא! הנה, למשל, 2 מטריצות מדרגה 3 בסדרים הנתונים, שהמכפלה שלהן היא מטריצה מדרגה קטנה ממש מ- 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = 0$$

ד. לא נכון. שוב, כמו בסעיף ג', הטענה הייתה נכונה לו היה מתקיים $rank(AB) = 3$, כי זה היה מבטיח שלעולם לא תתאפס שורה בדרוג של AB ואז לכל $c \in R^3$ יהיה פתרון למערכת $(AB)x = c$.

ה. לא נכון. אם מימד מרחב הפתרונות של המערכת $(AB)x = 0$ הוא 1, הרי שאז בהכרח מתקיים ש- $rank(AB) = 2$ וזה לא בהכרח נכון, למשל בדוגמא בסעיף ג', שם מימד מרחב הפתרונות הוא 3 כי $rank(AB) = 0$.

סימון נכון: א'.

<u>פתרון שאלה מספר 11:</u>

כידוע, למטריצות דומות יש בהכרח: אותו פ"א, אותם ע"ע, אותה דרגה, אותה עקבה ואותה דטרמיננטה. המטריצות A , B , ו- C כולן מדרגה 1, ואילו D היא מדרגה 2, לכן בהכרח D אינה דומה לאף אחת מהמטריצות האחרות. $trace(A) = trace(C) = -3$, ואילו $trace(B) = 1$, לכן B לא דומה ל- A ו- C. נותר לקבוע האם A ו- C דומות.

שתי המטריצות הן מדרגה 1, ומסדר 4×4 ולכן הן לא הפיכות, ומכאן כי 0 הוא ע"ע שלהן, מריבוי גיאומטרי השווה ל- $4-1 = 3$ (כי ר"ג של ע"ע של מטריצה A שווה ל- $n - rank(\lambda I - A)$. עבור ע"ע $\lambda = 0$ מתקבל שהר"ג הוא $n - rank(A)$). לכן, הר"א של ע"ע 0 בשני המקרים הוא 3 או 4, ומצאנו לפחות 3 ע"ע מתוך ה- 4 הקיימים. נמצא את הע"ע הנותר באמצעות העקבה. לפי משפט, סכום כל הע"ע של מטריצה שווה לעקבה שלה. לכן עבור המטריצה A והמטריצה C (כי לשתיהן אותה עקבה) נקבל כי:

$$0 + 0 + 0 + \lambda_4 = -3$$

$$\lambda_4 = -3$$

לכן בשתי המטריצות מתקיים כי 0 הוא ע״ע מר״א = ר״ג = 3, ו- (-3) הוא ע״ע מר״א = ר״ג = 1.

מאחר ולכל ע״ע ר״א = ר״ג, הרי ששתי המטריצות A ו- C לכסינות ודומות למטריצה האלכסונית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצות A ו- C דומות בעצמן.

סימון נכון: ד'.

<u>פתרון שאלה מספר 12:</u>

נתונה מטריצה ממשית A עם פרמטר a, ויש לקבוע מתי המטריצה לכסינה. נבדוק לאילו ערכים של הפרמטר a המטריצה לכסינה ונבחר בסעיף הנכון.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(\lambda - a)\begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -a & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda^2 - a^2) = (\lambda - a)^2(\lambda + a)$$

$$f_A(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda + a)$$

לפי הפ״א של A, ל- A יש שלושה ע״ע: $a, a, -a$. לקביעת לכסון, יש לבדוק מתי ר״א של כל ע״ע שווה לר״ג שלו, לכן נבחין בין שני מקרים: א. $a = -a$ ו- ב. $a \neq -a$ כי שני מקרים אלה משפיעים על הר״א של הע״ע.

א. $a = -a$

אם $a = -a$ הרי שאז $a = 0$ הוא ע״ע יחיד של A מר״א 3. במקרה זה, A לכסינה אם״ם ר״ג של 0 שווה גם הוא ל- 3, כלומר:

$$3 - \text{rank}(A) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \text{rank}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$$

אבל אם $a = 0$ עדין $A \neq 0$, ולכן במקרה זה A לא לכסינה.

ב. $a \neq -a$

במקרה זה, ל- A יש שני ע״ע שונים: a ו- $-a$.

$(-a)$ הוא ע״ע מר״א 1 ולכן הר״ג שלו שווה אף הוא ל- 1.

a הוא ע״ע מר״א 2 ולכן כדי ש- A תהייה לכסינה נדרוש כי ר״ג של a יהיה שווה אף הוא ל- 2, כלומר נדרוש:

$$3-rank(aI-A)=2 \quad \Rightarrow \quad rank(aI-A)=1$$

$$(aI-A)=\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מאחר והמטריצה $aI-A$ היא מטריצה מדרגה 1 לכל a, הרי ש- A לכסינה אם״ם $a \neq 0$ (שכן עבור $a=0$ כבר ראינו ש- A לא לכסינה).

סימון נכון: ג׳.

פתרון שאלה מספר 13:

לפי משפט, מתקיים כי לכל מטריצה ריבועית A ולכל פולינום $p(x)$, $p(A)v = p(\lambda)v$, כאשר λ הוא ע״ע של A השייך לו״ע v. במקרה שלנו, $p(x) = x^4 + 2x^3$. לכן, אם נמצא את הע״ע של A, נוכל למצוא את הע״ע של המטריצה $A^4 + 2A^3$ ולחשב את סכומם לקבלת $trace(A^4 + 2A^3)$.

נחשב פ״א של A למציאת הע״ע שלה.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 153 \\ 1 & -1 & -72 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & -153 \\ -1 & \lambda+1 & 72 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda+1)^2-4\right]$$

$$=(\lambda-2)\left[\lambda^2+2\lambda+1-4\right]=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-3)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$$

$$\lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=2 \quad , \quad \lambda_3=-3$$

$$p(x)=x^4+2x^3 \qquad \Rightarrow \qquad p(A)=A^4+2A^3$$

$$\mu_1=p(\lambda_1)=p(1)=1^4+2\cdot 1^3=1+2=3$$

$$\mu_2=p(\lambda_2)=p(2)=2^4+2\cdot 2^3=16+16=32$$

$$\mu_3=p(\lambda_3)=p(-3)=(-3)^4+2\cdot(-3)^3=81-54=27$$

$$trace(A^4+2A^3)=\mu_1+\mu_2+\mu_3=3+32+27=62$$

סימון נכון: ה׳.

פתרון שאלה מספר 14:

נתונה מטריצה ממשית A מסדר $n \geq 2$, ובעלת פ״א $f_A(\lambda) = \lambda^n - 1$. כידוע, ע״ע של מטריצה A הם השורשים של הפ״א שלה, לכן במקרה שלנו, הע״ע של A הם n שורשי היחידה מסדר n, כלומר:

$\lambda_k = cis\frac{360k}{n}$ לכל $k = 0,1,\ldots,n-1$, והם כולם שייכים ל- C ושונים זה מזה. לכן כל ע״ע של A מקיים שהר״א שלו שווה לר״ג שלו ושווה ל- 1. לכן, A לכסינה מעל C לכל n.

סימון נכון: ד'.

פתרון שאלה מספר 15:

לפי הנתון, הקבוצה: $\{x\ ,\ x^2+1\ ,\ -x^2+1\}$ היא בסיס א״נ ביחס למכפלה פנימית כלשהי.

עלינו לחשב את הנורמה של: $4x^2+3x+2$.

אם $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ הוא בסיס א״נ של מרחב וקטורי V, הרי ש:

$$\langle v_i\ ,\ v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

לכן, אם $v\ ,v \in V$ ניתן לכתיבה כקומבינציה ליניארית של איברי הבסיס האי״נ הנתון, כלומר קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. לפי תכונות מכפלה פנימית מתקיים:

$$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\ ,\ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\rangle = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

נשתמש בנוסחה זו לחישוב הנורמה של $4x^2+3x+2$:

$$v = 4x^2+3x+2$$
$$v_1 = x\ ,\ v_2 = x^2+1\quad ,\quad v_3 = -x^2+1$$

$$4x^2+3x+2 = \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2+1) + \alpha_3(-x^2+1)$$
$$\begin{cases} 4 = \alpha_2 - \alpha_3 \\ 3 = \alpha_1 \\ 2 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

$$\|4x^2+3x+2\|^2 = (3)^2 + (3)^2 + (-1)^2 = 9+9+1 = 19$$
$$\|4x^2+3x+2\| = \sqrt{19}$$

סימון נכון: ד'.